DE CENTRO GRAVITATIS

DISSERTATIO INAUGURALIS,

QUAM

AMPLISSIMO PHILOSOPHORUM MARBURGENSIUM ORDINI

AD

SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES

RITE OBTINENDOS

OFFERT

AUGUSTUS FRIDERICUS PRESTEL.

Michael August Friedrich Prestel

MARBURGI CATTORUM MDCCCXXXIV.
1834

1. Omnibus corporibus nisum inesse centro terrae adpropinquandi, quotidiana experientia edocemur. Quod quidem eo cernitur, quod singula corpora, potestate libere se movendi iis concessa aliisque ea circumdantibus remotis, certum quendam motum, quem lapsum nominamus, recipiunt; contra, si quacunque tandem ob aliquam causam motu impediantur, ille nisus corporum pressu vel tractu sese exserit, et hujusce rei causam gravitatem appellare solemus.

Rectam lineam, qua corpus in terram libere decidit, *verticalem*, sicuti planitiem per eam positam, verticalem, omnem vero planitiem, qua linea verticalis perpendiculariter demissa est, *horizontalem*, ac quamlibet lineam denique rectam in ea collocatam horizontalem vocare receptum est.

2. Certa pressus vel tractus, quem corpus in aliud horizontaliter subjectum, aut in filum verticale, ex quo pendet intendit, magnitudo, statera mensurabilis, ejusdem corporis pondus appellatur. Quod si nulla materia ponderabilis corpori vel additur vel ab eo detrahitur: hoc pondus sibi constat, quamvis ejus situs, forma et extensio mutentur. Exinde sequitur, gravitatem in unamquamque materialem corporis particulam cum pari „intensitate“ effectum habere.

3. Spatium, quod corpus in longum, latum et altum complectitur, ejusdem volumen; quod autem hoc spatium implet, materia, ac multitudo partium materialium, in volumine corporis contentarum, massa ejusdem nominatur. Ex comparatione massae cum volumine densitatis notio exoritur.

4. De connexu inter volumen, pondus, massam et densitatem duorum corporum haec valent:

a) Densitas duorum corporum aequis voluminibus aeque se habet ac massa eorum. Nam quo plures particulae materiales in volumine corporis continentur, eo propieres has particulas sibi esse, eo majorem densitatem corporis esse necesse est.

b) Massae duorum corporum aequis voluminibus aequae sunt, atque eorum, cum gravitas in quamlibet particulam materialem aequali intensitate vim suam exserat, pondus eorum multitudini partium materialium proportionale sit necesse est.

c) Volumina aequali densitate igitur aeque ac pondera, ideoque etiam ac massae sese habent.

d) Ex his vero dictis et massas et densitates directe eadem qua pondera, et vice versa eadem, qua volumina, ratione esse, facile colligi potest.

5. Cum materia in infinitum dividua cogitari possit, nihil impedit, quo minus quodvis corpus physicum tanquam complexum infiniti numeri punctorum materialium nobis fingamus eaque ut elementa corporis universitate eorum id constituentia spectemus. Hoc sumpto, unumquodque corpus ut continuum systema punctorum materialium adparet, in quibus gravitates in parallela vim suam exserunt; quapropter aequationes, quae in sta-

tica ut parallelae in systemate punctorum efficaces vires respectu ad statum aequilibritatis deducuntur, cum exiguis immutationibus pro quoque corpore gravitati obnoxio valebunt.

6. Quodsi plura situ ad tres inter se normales planities relata eoque definita materialia puncta cogitamus, quae viribus parallelis moventur, hae in unam vim compositam redigi poterunt. Haec vis composita summae virium parallelarum aequalis est, nisi hae aequilibrium inter se habeant. Distantia puncti ab vi composita ad motum sollicitati a quapiam illarum planitierum coordinatarum invenitur, si summa algebraica staticorum momentorum virium componentium relatione trium inter se normalium planitierum capta per algebraicam ipsarum virium summam dividatur. Si per Q, Q', Q'' etc. vires in systema punctorum agentes, per p, p', p'' . . . q, q', q'' . . . r, r', r'' etc. coordinatas suorum punctorum ad motum impulsorum ratione trium normalium planitierum coordinatarum habita, per P summam virium parallelarum, et per X, Y, Z coordinatas puncti earum impetus etiam ad dictas planities relatas significamus, tunc est:

$$P = Q + Q' + Q'' + etc.$$
$$PX = Qp + Q'p' + Q''p'' + etc.$$
$$PY = Qq + Q'q' + Q''q'' + etc.$$
$$PZ = Qr + Q'r' + Q''r'' + etc.$$

Tribus posterioribus aequationibus per P divisis, inde consequitur:

$$X = \frac{Qp + Q'p' + Q''p'' + etc.}{P},$$

$$Y = \frac{Qq + Q'q' + Q''q'' + etc.}{P},$$

$$Z = \frac{Qr + Q'r' + Q''r'' + etc.}{P}.$$

Punctum impetus vis compositae tribus coordinatis X, Y, Z determinatum centrum virium parallelarum vocatur. Ejus situs in systemate earum a directione virium plane non dependet, dummodo sibi ipsis parallelae maneant.

7. In aequationibus antecedente paragrapho allatis systema immutabile suppositum est, cujus puncta quocunque intervallo sunt, et in quae quaelibet vires agunt. Aequationes autem suum valorem reservant, quantuscunque et numerus punctorum et quam exigua eorum intervalla sint. Quod si ponamus, systema punctorum intra spatium certa ratione determinatum contineri: distantiae punctorum materialium inter se magis magisque minores evadent, quo minus numerus eorum major evadit, illaeque infinite exiguae erunt, cum hic infinite magnus ponatur. — Quodsi vires motrices Q, Q', Q'' etc. supra dictae e gravitate exortae et systema punctorum materialium continuum, i. e. physicum corpus sumantur, leges memoratae eaedem manebunt. Vis autem composita e gravitate natarum virium motricium aequalis est ponderi corporis, punctumque ejus, ex quo illud ad motum sollicitatur, nomen *centri gravitatis* obtinet. In unoquoque corpore modo unicum inest, cum casus exceptionis, ubi vires ad binas aequales contrarias reducantur, hoc loco in considerationem vocari non possit, omnibus non solum in parallelas, sed etiam in unam directionem agentibus. Ex antecedentibus deinde sequitur, centrum gravitatis in omnibus corporis positionibus idem manere in eoque totum corporis pondus ut unicam vim compositam posse cogitari.

De centro gravitatis in universum.

8. Quod si centrum gravitatis corporis suffultum sit, corpus in qualibet positione aequilibrium retinebit. Cum enim centrum gravitatis punctum initiale coordinatarum habeatur, est $X = o$, $Y = o$, $Z = o$; quapropter aequationes paragraphi sextae hanc formam recipiunt:

$$\begin{aligned} P &= Q + Q' + Q'' + etc. \\ o &= Qp + Q'p' + Q''p'' + etc. \\ o &= Qq + Q'q' + Q''q'' + etc. \\ o &= Qr + Q'r' + Q''r'' + etc., \end{aligned}$$

i. e. si punctum gravitatis corporis suffultum sit, fulcrum, ut prima aequatio demonstrat, pressionem patitur $= P$, i. e. aequalem toti corporis ponderi. Tres ceterae aequationes sese referunt ad rotationem circa axes rectilineas transeuntes per centrum gravitatis; cumque qualibet earum aequationum est $= o$, hoc probat ac demonstrat, talem rotationem locum habere non posse.

9. Cum vires motrices Q, Q', Q'' etc. e gravitate proveniant, intensitas earum producto massae in gravitatem aequalis ponenda est. Cum singulae massae elementares per m, m', m'' etc., vis autem accelerans proveniens a gravitate per φ notetur, loco Q, Q' . . ., valores $m\varphi$, $m'\varphi$ . . . poni poterunt. Sic aequationes §. 6. in sequentes transformantur:

$$X = \frac{pm\varphi + p'm'\varphi + p''m''\varphi + etc.}{m\varphi + m'\varphi + m''\varphi + etc.};$$

φ factore communi hic omisso, est:

$$X = \frac{pm + p'm' + p''m'' + etc.}{m + m' + m'' + etc.};$$

aequabiliter est:

$$Y = \frac{qm + q'm' + q''m'' + etc.}{m + m' + m'' + etc.},$$

$$Z = \frac{rm + r'm' + r''m'' + etc.}{m + m' + m'' + etc.}.$$

Ex eo clarum ac manifestum est, situm centri gravitatis non dependere ab vi accelerante gravitatis; centrum gravitatis ideo quolibet loco terrae superficiei in corpore eundem situm habebit, quamquam vis accelerans gravitatis non ubique locorum eadem est.

10. Ad situm centri gravitatis in corpore determinandum, tam formam spatii, quod massa corporis complectitur, quam partitionem massae in spatio considerare debemus. Massa in spatio, quod implet, aut aequabiliter aut inaequabiliter distributa esse potest, exinde corpora homogenea et heterogenea discernuntur. Corpora homogenea ea appellantur, quibus massa ita distributa est, ut aequabilibus partibus voluminis tantundem gravis materiae conveniat; igitur re aliis verbis expressa, ut densitas in omnibus partibus una eademque sit; casu autem contrario, heterogenea appellantur. Corpora heterogenea, in quibus massa inaequabiliter dispartita est, sunt:

a) ea, quorum densitas ex certa lege mutatur;
b) ea, in quibus certa lex non valet; horum centrum gravitatis via theoretica determinari non potest.

11. Centrum gravitatis corporum heterogeneorum, centrum gravitatis massae, centrum vero gravitatis corporum homogeneorum centrum gravitatis figurae appellaveris. Casus posterior est casus specialis prioris.

12. Quod ad formam attinet, situs centri gravitatis in iis tantum corporibus determinari potest, ubi forma geometrice mensurabilis est.

13. Cum disquisitiones nunc respectu systematis continui punctorum materialium instituantur, denotationes ita mutabimus, ut distantias elementorum, in quae corpus divisum cogitamus, ab tribus planitiebus coordinatis per x, x' . . y, y' . . z, z' . . . et massae m, m' . . . per p, p' . . . (sub quibus et pondera earum tibi imaginatus fueris) signemus, aequationes superiores formam sequentem habebunt:

$$P = p + p' + p'' + \text{etc.}$$
$$PX = px + p'x' + p''x'' + \text{etc.}$$
$$PY = py + p'y' + p''y'' + \text{etc.}$$
$$PZ = pz + p'z' + p''z'' + \text{etc.}$$

Si massae p, p', p'' . . . infinite parvae et infinite vicinae cogitantur, summa earum conficit massam totius corporis $= P$, dum p tunc massae elementum appellatur perque dP denotatur, xdP superioribus xp, $x'p'$ . . . respondebit. Nunc vero summa omnium horum productorum sumenda est, et per summam omnium massarum elementarium, i. e. per massam P dividenda est, ut expressio distantiae centri gravitatis ab tribus planitiebus coordinatis acquiratur. Haec autem summa omnium productorum formae xdP est $\int xdP$. Exinde aequationes superiores fient:

$$X = \frac{\int xdP}{P}; \quad Y = \frac{\int ydP}{P}; \quad Z = \frac{\int zdP}{P}.$$

Sectio I.

De investigatione centri gravitatis corporum homogeneorum.

14. Si corpus, de quo quaeritur, homogeneum est, pondera voluminibus erunt proportionalia, quapropter haec pro voluminibus substitui poterunt. Si volumina notentur per V, V', V'' tec., habebis:

$$X = \frac{\int x dV}{V}; \quad Y = \frac{\int y dV}{V}; \quad Z = \frac{\int z dV}{V}.$$

Caput I.

De investigatione centri gravitatis linearum.

15. Et lineae et planities, sicuti in geometria spectantur, pondere prorsus destituuntur. Ne igitur problema: centrum gravitatis earum invenire, absurdum esse videatur, omnia earum puncta aequo pondere vel aequis et parallelis viribus tracta cogitanda sunt.

16. Quodsi formulas supra (§. 14.) datas in usum revocamus, ut centrum gravitatis lineae, cujus situs in spatio determinatus est, per distantias a tribus planitiebus fixis inter se normalibus investigemus, elementum curvae obtinemus

$$dS = dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}} \text{ sit.}$$

(In hac formula sub S longitudo arcus intelligenda est.)

$$X = \frac{\int x\,dx\,\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}{\int dx\,\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}},$$

$$Y = \frac{\int y\,dx\,\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}{\int dx\,\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}},$$

$$Z = \frac{\int z\,dx\,\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}{\int dx\,\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}.$$

17. Fac centrum gravitatis lineae rectae esse determinandum. Sint aequationes

$$y = ax + b, \quad z = a'x + b'.$$

In hoc casu est

$$\frac{dy}{dx} = a, \text{ et } \frac{dz}{dx} = a', \text{ ergo:}$$

$$\int dx\,\sqrt{1+a^2+a'^2} = x\sqrt{1+a^2+a'^2} + C,$$

$$\int x\,dx\,\sqrt{1+a^2+a'^2} = \frac{x^2}{2}\sqrt{1+a^2+a'^2} + C',$$

$$\int y\,dx\,\sqrt{1+a^2+a'^2} = \left(\frac{ax^2+2bx}{2}\right)\sqrt{1+a^2+a'^2} + C'',$$

$$\int z\,dx\,\sqrt{1+a^2+a'^2} = \left(\frac{a'x^2+2b'x}{2}\right)\sqrt{1+a^2+a'^2} + C'''.$$

C, C', C'', C''' sunt hic constantes arbitrariae. Si m et n

sint valores, quos x pro punctis extremis respectu centri gravitatis lineae rectae, de qua agitur, recipit, habemus pro integralibus intra hos terminos captis:

$$(m - n) \sqrt{1 + a^2 + a'^2},$$

$$\left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right) \sqrt{1 + a^2 + a'^2},$$

$$\left(\frac{a(m^2 - n^2) + 2b(m - n)}{2}\right) \sqrt{1 + a^2 + a'^2},$$

$$\frac{a'(m^2 - n^2) + 2b'(m - n)}{2} \sqrt{1 + a^2 + a'^2},$$

ergo $X = \frac{m + n}{2}$,

$$Y = \frac{a}{2}(m + n) + b,$$

$$Z = \frac{a'}{2}(m + n) + b'.$$

Hae vero sunt coordinatae pro medio lineae rectae.

Centro gravitatis lineae rectae cognito, centrum gravitatis cujuslibet polygoni facile calculatur.

18. Formulae pro calculo centri gravitatis cujuscunque lineae simpliciores redduntur, si linea in una planitie assumatur eaque instar planitiei coordinatae consideretur, una enim quantitatum X, Y, Z, tunc aequabitur 0. $Z = 0$ posito et dz et z pariter 0 fieri debebit.

Formulae superiores tunc erunt hae:

$$S = \int dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

$$X = \frac{\int x dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{S}.$$

$$Y = \frac{\int y dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{S}.$$

19. Praeterea hoc supposito, curvam per rectam lineam in duas partes symmetricas dividi, in hac linea centrum gravitatis invenietur; hac vero recta linea pro axe x habita, erit $Y = 0$, et adhuc determinandum restat

$$S = \int dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

$$X = \frac{\int x dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{S}.$$

Sin est illa linea axis Y, erit $X = 0$ et determinari reliquum est

$$S = \int dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}},$$

$$Y = \frac{\int y dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{S}.$$

20. Secundum has regulas centrum gravitatis arcus circularis hac ratione determinabitur.

Arcus AB (Fig. 1.) in E per radium CE in duas aequales partes divisus sit. Punctum initiale coordinatarum in centro

circuli C assumatur, radius $CE = CM$ per r, arcus EM per φ, $CP = Mp$ per y, et $PM = Cp$ per x signatus sit.

Est $y = r \cdot cos\left(\frac{\varphi}{r}\right)$ et $x = r\ sin\left(\frac{\varphi}{r}\right)$,

$$dx \cdot \surd\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = d\varphi, \text{ ergo}$$

$$\int y dx \surd\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} = r^2\ sin\left(\frac{\varphi}{r}\right) + Const.$$

Hoc integrali in totum arcum $AB = a$ relato, obtinebimus

$$Y = \frac{2r^2\ sin\ \frac{a}{2r}}{a}.$$

Chorda AB per c signata, est

$$c = 2r\ sin\ \frac{a}{2r}, \text{ igitur } aY = rc, \text{ aut}$$

$$a : c = r : Y,$$

i. e. arcus refertur in chordam, ut radius se refert in distantiam centri gravitatis ab centro circuli appertinentis.

21. Centrum gravitatis arcus cycloidis aeque facile determinabis.

Sit (Fig. 2.) $AM = x$, $MP = y$, $AD = 2r$, est:

$$y = r\ Arc \cdot cos\left(\frac{r - x}{r}\right) + \sqrt{2rx - x^2}, \text{ et}$$

$$dy = \surd\left(\frac{2r - x}{x}\right) dx,$$

$$S = \int \surd\left(\frac{2r}{x}\right) \cdot dx = \int dx\ \surd\left(\frac{2r}{x}\right) = 2\sqrt{2rx}; \text{ ergo}$$

$$X = \frac{\int dx\, \sqrt{2rx}}{2\sqrt{2rx}} = \tfrac{1}{3}x, \quad \text{pariter}$$

$$Y = \frac{\int .\, y dx\, \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}{2\sqrt{2rx}},$$

$$\int y dx \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = 2y\sqrt{2rx} + \left(\frac{8r-4x}{3}\right)\sqrt{(4r^2-2rx)} + Const.$$

Constans determinatur dum pro $x = 0$ totum integrale $= 0$ fieri debet. Quocirca habebis

$$\frac{16}{3}r^2 + Const = 0; \; Const = -\frac{16}{3}r^2, \quad \text{ergo}$$

$$Y = y + \frac{(4r - 2x)\sqrt{(2r - x)} - 2r\sqrt{2r}}{3\sqrt{x}}.$$

Per hos ambos valores pro X et Y centrum gravitatis cujuscunque arcus cycloidis determinatur.

Arcu PQ per axem X in duas aequales partes diviso centrum gravitatis in hoc axe $\tfrac{1}{3}x$ ab puncto verticis curvae procul abest.

Caput II.

Determinatio centri gravitatis planitierum.

22. Si planities, cujus centrum gravitatis determinandum est vera, et per duas quaslibet curvas circumsepta sit, situs centri gravitatis hac ratione determinatur.

Sint AX, AY (Fig. 3.) ambo axes coordinatarum, sitque A punctum coordinatarum initiale. Planities sit igitur $MM'NN'$, li-

mitata per ambas curvas MM' et NN' et per ordinatas PM et $P'M'$, quae ad abscissas $AP = a$ et $AP' = b$ appertinent. Deinde sit $mp = y'$, ordinata, quae est curvae MM', et $np = y''$ ordinata, quae est curvae NN' ambaeque ad unam eandemque abscissam pertineant.

Nunc vero planitiem $MM'NN'$ per lineas perpendiculares in axe constitutas, in infinitam quantitatem, infinite parvorum elementorum divisam cogitemus, quorum unum sit inter ordinatas pm et $p'm'$. Quod pro parallelogrammate cujus basis sit $= mn$, et cujus altitudo $= pp'$ haberi potest. Planitie S nominata, obtinebis

$$dS = (y' - y'')\, dx;$$
$$S = \int (y' - y'')\, dx.$$

Ad totam planitiem obtinendam integrale inter terminos $x = a$ et $x = b$ sumendum est. Centrum gravitatis elementorum in medium eorum incidet, ita ut distantia ab axe $AX = \frac{1}{2}(y' + y'')$ et distantia ab axe $AY = x + \frac{1}{2}dx$ sit, aut cum $\frac{1}{2}dx$ ut evanescens aestimari possit $= x$.

Prior distantia per valorem hujus elementi $(y' - y'')\, dx$ multiplicata $\frac{1}{2}(y'^2 - y''^2)\, dx$; hac expressione inter terminos $x = a$ et $x = b$ integrata, habebis pro

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int (y'^2 - y''^2)\, dx}{\int (y' - y'')\, dx};$$

pro X habebis

$$X = \frac{\int (y' - y'')\, x dx}{\int (y' - y'')\, dx}.$$

Una axium coordinatarum planitiem in duas partes aequales dividente, centrum gravitatis in ea reperitur, et tantum x aut y investigandum est.

Si planities non per curvam NnN' limitatur, sed per axem AX determinatur, erit $y''=0$ et

$$S = \int y dx,$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx},$$

$$X = \frac{\int y x dx}{\int y dx}.$$

23. Sit ABC (Fig. 4.) rectangulum triangulum, cujus centrum gravitatis determinandum est; A punctum coordinatarum initiale $AB = a$ et $AC = b$, est

$$y = -\frac{b}{a}x + b,$$

$$X = \frac{\int xy dx}{\int y dx} = \frac{2ba^2}{6ba} = \frac{1}{3}a,$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx} = \frac{1}{3}b.$$

Centro gravitatis rectanguli trianguli hoc modo invento, centrum gravitatis pro unoquoque triangulo facile determinari potest.

24. Determinatio centri gravitatis trapezii. Trapezium sit $CC'N'N$ (Fig. 5.). Per medium lineae CC' et NN' axem AX ducemus. Quae quidem axis omnia parallela MM' dimidiabit. Cum hae lineae ut elementa trapezii considerari possint, axis Ax per centrum gravitatis earum percurret. Sit $AP = x$, $PM = y$, $AO = a$, $CC' = b$, $NN' = c$, Cc παραλλήλως cum axe ducto, inde nascuntur ambo similia triangula MCm, NCc. Est

$$Co : oN = Cm : Mm,$$

$$a : \tfrac{1}{2}(c-b) = x : y - \tfrac{1}{2}b.$$

Hoc aequationem efficit

$$y = \left(\frac{c-b}{2a}\right)x + \frac{b}{2}.$$

His valoribus in generali formula supra deducta substitutis, est

$$\frac{\int\left\{\left(\frac{c-b}{2a}\right)x^2dx + \frac{1}{2}bxdx\right\}}{\int\left\{\left(\frac{c-b}{2a}\right)xdx + \frac{1}{2}bdx\right\}} =$$

$$= \frac{\frac{c-b}{6a}x^3 + \frac{1}{4}bx^2}{\frac{c-b}{4a}x^2 + \frac{1}{2}bx} = \frac{\frac{2}{3}(c-b)x^2 + abx}{(c-b)x + 2ab}.$$

Constans ut hoc loco adjiciatur, plane superfluum est, cum si $x = 0$ sit, ambo integralia evanescant.

Valor acquisitus distantiam centri gravitatis planitiei $CC'M'M$ ab puncto A exprimit. Ad centrum gravitatis totius trapezii inveniendum $x = a$ ponendum est, quo facto superior expressio erit

$$= \frac{a\left(\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c\right)}{c+b}.$$

Si $c = b$ sit, figura in parallelogramma mutatur atque expressio $= \frac{1}{2}a$ fiet.

Si $b = 0$ sit, trapezium triangulum atque $d = \frac{2}{3}a$ erit.

25. Investigatio centri gravitatis planitiei parabolae.

Aequatio parabolae est:

$$y = \sqrt{ax}, \text{ ergo}$$

$$\frac{\int xydx}{\int ydx} = \frac{\int dx\sqrt{ax^3}}{\int dx\sqrt{ax}} = \tfrac{6}{10}x = \tfrac{3}{5}x.$$

Ut distantiam centri gravitatis planitiei dimidiae parabolicae AMP (fig. 6.) ab axe inveniamus, formulam

$$Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx}$$

in usum revocamus, quo

$$\tfrac{3}{8}\sqrt{ax} = \tfrac{3}{8}y$$

obtinemus.

26. Centrum gravitatis planitiei hyperbolae quo modo inveniatur. Est

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)},$$

$$dS = y dx = \frac{b}{a} dx \sqrt{(x^2 - a^2)}, \text{ aut si}$$

$x^2 - a^2 = (u - x)^2$ ponatur,

$$dS = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{b}{a} du \frac{(u^2 - a^2)^2}{u^3}, \text{ ergo}$$

$$S = Const. + \tfrac{1}{8} \cdot \frac{b}{a}\left(u^2 - \frac{a^4}{u^2}\right) - \tfrac{1}{2} ab \cdot log\, u,$$

aut si integrale a vertice, ubi $x = a$, ergo $u = a$ est, calculatur,

$$S = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{b}{a}\left(\frac{u^4 - a^4}{u^2}\right) - \frac{ab}{2} log\left(\frac{u}{a}\right)$$

$$= \frac{bx}{2a} \sqrt{(x^2 - a^2)} - \tfrac{1}{2} ab\ log\left(\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}\right)$$

$$= \frac{yx}{2} - \frac{ab}{2}\ log.\ nat.\left(\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}\right).$$ Deinde

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

$$ydy = \frac{b^2}{a^2}xdx,$$

$$\frac{a^2y^2dy}{b^2} = xydx,$$

$$\frac{a^2y^3}{3b^2} = \int xydx, \text{ igitur}$$

$$X = \frac{\int xydx}{S} = \frac{a^2y^3}{3b^2S}.$$

Centrum gravitatis partis planitiei inter axem et hyperbolam sitae determinatur per

$$Y = \frac{\int y^2dx}{2S} = \frac{b^2x(x^2 - 3a^2b^2)}{6a^2S}.$$

27. Centrum gravitatis dimidiae ellipseos investigatur.

Sit a dimidium majoris, b dimidium minoris axis ellipseos, est

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

aequatio ejusdem. Quare

$$dS = \frac{bdx\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}.$$

Si hîc per partes integratur, est

$$\int\frac{bdx\sqrt{(a^2-x^2)}}{a} = \frac{bx\sqrt{(a^2-x^2)}}{a} + \frac{b}{a}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}, \text{ aut}$$

$$\int\frac{bdx\sqrt{(a^2-x^2)}}{a} = \frac{bx\sqrt{(a^2-x^2)}}{a} - \frac{b}{a}\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} +$$

$$+ ab\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}, \text{ aut}$$

$$\frac{2b}{a}\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{bx\sqrt{(a^2-x^2)}}{a} + ab\ Arc.\ Sin.\ \frac{x}{a},$$

unde sequitur

$$S = \frac{bx}{2a}\sqrt{(a^2-x^2)} + \tfrac{1}{2}ab\ Arc.\ Sin.\ \frac{x}{a}.$$

Circulus DMB (Fig. 7.) si cum semidiametro $= a$ denotetur, est

$$ABMP = BAM + MAP =$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2\ Arc.\ Sin.\left(\frac{x}{a}\right) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)},\ \text{ergo}$$

$$S = \frac{b}{a}ABMP = \tfrac{1}{2}ab\ Arc.\ Sin.\left(\frac{x}{a}\right) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)}.$$

Si ponatur $x = a$, erit

$$S = \tfrac{1}{4}\pi ab.$$

Est $\quad xydx = \frac{a^2y^2dy}{b^2}$, igitur

$$\int xydx = \frac{a^2y^3}{3b^2}.$$

Hoc integrali inter terminos $x = 0$ et $x = a$ assumpto

$$X = \frac{4a}{3\pi}.$$

Scholion. Etiam centra gravitatis planitierum irregularium via theoretica determinari possunt; tamen methodi hunc in finem institutae expositio a scopo nostro aliena est. Admodum ingeniosa est hoc respectu methodus *Bougueriana* in additamentis ad scriptum suum praemio ornatum indicata „*de la Mâture des vaisseaux. Paris* 1727.“ p. 123. etc. Etiam accuratior est methodus primum

constituta in opere Chapmannii, classi Sueciae praefecti (*Traité de la construction des vaisseaux; trad. du Suédois de Mr. Chapmann par Vial de Clairbois. Brest* 1781.). Prima ejusdem idea debetur geometro anglico Thomae Simpson (Math. Dissert. pag. 109.). Hac methodo centrum gravitatis cujuscunque planitiei irregularis ope segmentorum parabolicorum eorumque centri gravitatis calculatur. Recentioribus de Statica in publicum missis operibus haec methodus tradita reperitur scilicet in opere Don. G. Juan „Examen maritime" Tom. II. Par. 1762. p. 82. Pronny in „architecture hydraulique" Tom. I. §. 223. p. 93. et Eytelweinii „Statik fester Körper Tom. I. §. 126 ff.

Caput III.

Determinatio centri gravitatis in corporibus.

29. Si superficies corporis, cujus centrum gravitatis calculandum est, per tres inter se normales coordinatas x, y, z determinata est; volumen cujusque particulae per dx, dy, dz expressum cogitari potest. — Si contra situs cujuslibet puncti, primo per angulum $OAP = \nu$ (fig. 8.), deinde per angulum $MAP = \mu$, cujus planities in plano anguli ν normalis stat, et per distantiam $AM = \varrho$ datus, constitutus est, elementum corporis $MM'NN'$ considerari potest tamquam globi particula, cujus una dimensio $= d\varrho$ est. Cum autem arcus $MM' = \varrho . d\nu . \cos . \mu$ sit, si PAP' per $d\nu$ significatur et particulam per duas in planitie CAP normaliter stantes planities limitatam cogitamus, et porro $NN' = \varrho d\mu$ sit, elementum est

$$= \varrho^2 d\varrho \,.\, d\nu \,.\, d\mu \,.\, \cos\mu.$$ Quam ob rem

$$dV = dx \,.\, dy \,.\, dz,$$

$$V = \iiint dx \,.\, dy \,.\, dz,$$ aut

$$dV = \varrho^2 d\varrho \,.\, d\nu \,.\, d\mu \,.\, \cos.\mu,$$

$$V = \iiint \varrho^2 d\varrho \,.\, d\nu \,.\, d\mu \,.\, \cos.\mu,$$

His valoribus in formulis generalibus substitutis, obtinemus

$$X = \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz};$$ aut

$$= \frac{\iiint \varrho^3 \cos.\mu^2.\cos.\nu.d\varrho.d\nu.d\mu}{\iiint \varrho^2 \, d\varrho \, d\nu \, d\mu \,.\, \cos.\mu}.$$

$$Y = \frac{\iiint y dx dy dz}{\iiint dx dy dz};$$ aut

$$= \frac{\iiint \varrho^3.\cos.\mu^2.\sin.\nu.d\varrho.d\mu.d\nu}{\iiint \varrho^2 \, d\varrho \, d\nu \, d\mu \,.\, \cos.\mu}.$$

$$Z = \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz};$$ aut

$$= \frac{\iiint \varrho^3.\sin.\mu.\cos.\mu.d\varrho d\mu.d\nu}{\iiint \varrho^2 d\varrho \, d\nu \, d\mu.\cos.\mu}.$$

30. Centrum gravitatis semiglobi qua ratione determinetur. Est

$$z = \frac{\iiint \varrho^3 d\varrho \sin.\mu.\cos.\mu.d\mu d\nu}{\iiint \varrho^2 d\varrho \,.\, d\nu \,.\, d\mu \,.\, \cos\mu}.$$

Haec formula perfacile fit integrabilis, si distantiae inde a centro calculentur. Quia enim tunc distantiae usque ad superficiem omnes aequales sint, plenus valor de r non est functio de μ et ν. Ponamus igitur $\varrho = r$, quo facto habebimus

$$\iiint r^2 dr \,.\, d\nu \,.\, d\mu \,.\, \cos\mu = \tfrac{1}{3} r^3 \iint d\nu \,.\, d\mu \,.\, \cos \,.\, \mu =$$
$$= \tfrac{1}{3} r^3 \int \sin \,.\, \mu \,.\, d\nu + C;$$

aut cum ad hemisphaeram assequendam μ de 0 usque ad 180° sumitur, fit:

$$\tfrac{1}{3} r^3 \int d\nu = \tfrac{2}{3} r^3 \pi$$

ubi ν per totum ambitum de $\nu = 0$ usque ad $\nu = 2\pi$ capi debetur.

Integrale $\iiint r^3 .dr. \sin .\mu. \cos. \mu .d\mu. d\mu$ inter eosdem terminos assumptum erit

$$\iiint r^3 \,.\, dr \,.\, \sin \,.\, \mu \,.\, \cos \,.\, \mu \,.\, d\mu \,.\, d\nu = \tfrac{1}{4} r^4 \pi, \text{ ergo}$$

$$Z = \frac{\tfrac{1}{4} r^4 \pi}{\tfrac{2}{3} r^3 \pi} = \tfrac{3}{8} r.$$

Sed gravitatis centrum hemisphaerae non majori opera secundum formulam supra allatam

$$Z = \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz}$$

ad calculos vocatur.

Prima integratione triplices integrales

$\iiint dx dy dz$, invenis:

$\iint z dy dx$; si vero

$z^2 = r^2 - x^2 - y^2$,

vel punctum initiale coordinatarum in centro sphaereo cogitamus, integrale supra allatum, quum pro z valorem 0 ad id punctum usque, quo ordinata z sphaerae superficiem in parte positiva secat; sumpsimus, aequale est:

$$\iint dx dy \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}.$$

Quam expressionem quum integraveris, x habito pro immutabili, fit:

$$\int dy \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)} = \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2)\ Arc.\ Sin.\ \frac{y}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$
$$+ \tfrac{1}{2} y \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}.$$

Summam totius hemisphaerae requirenti integrale inter terminos $- \sqrt{(r^2 - x^2)}$ et $+ \sqrt{(r^2 - x^2)}$ sumendum est; intra hos fines fit integrale $= \pi\ (r^2 - x^2)$. Hac expressione in duplici illo integrali

$$\iint dxdy \sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)}$$

reposita, evadit

$$\pi \int (r^2 - x^2)\ dx.$$

Hac integratione ultima perducta, efficitur

$$\pi\ (r^2 x - \tfrac{1}{3} x^3).$$

Intra fines, quibus x valorem 0 et r habet, haec expressio est:

$$= \pi\ \tfrac{2}{3} r^3.$$

En notam illam hemisphaerae summae formulam.

Triplex integrale

$$\iiint zdzdxdy$$

primo x ratione habita, si integraveris, efficies:

$$\iint xdyzdz = \iint \sqrt{(r^2 - z^2 - y^2)}\ dyzdz;$$

tum $dy \sqrt{(r^2 - z^2 - y^2)}$ ita integrato, ut z invariabile cogites, fit

$$\int dy \sqrt{(r^2 - z^2 - y^2)} = \tfrac{1}{2}(r^2 - z^2)\ Arc.\ \frac{y}{r^2 - z^2}$$
$$+ \sqrt{(r^2 - z^2 - y^2)}.$$

Hocce integrale item intra terminos $y = - \sqrt{(r^2 - z^2)}$ et $y = + \sqrt{(r^2 - x^2)}$ sumendum est, tum fit $\pi (r^2 - z^2)$.

Qua expressione in duplici illo integrali substituta invenies:

$$\pi\int(r^2 - z^2)\,zdz = \tfrac{1}{2}\pi r^2 z^2 - \tfrac{1}{4}\pi z^4.$$

Quam expressionem quum intra terminos $z = 0$ et $z = r$ sumpseris, fit: $\frac{1}{4}\pi r^4$, ergo

$$Z = \frac{\iiint zdzdydx}{\iiint dzdxdy} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^4}{\frac{2}{3}\pi r^3} = \tfrac{3}{8}r.$$

Caput IV.

Corporum, quae superficiei circa axem rotatione prognata sunt, gravitatis centrum definitur.

31. Sit MM' (Fig. 3.) ea curva, cujus circa axem AP' rotatione superficies corporum efficitur, eademque curva coordinatis $AP = x$ et $PM = y$ definita. Ordinata PM ut quaeque alia pm circuli planitiem progignit, cujus summa est $= \pi y^2$. Corpus vero infinita cylindrorum, quorum altitudinem per dx indicemus, contineri multitudine accipere possumus. Uniuscujusque horum cylindrorum volumen erit $= dx.\pi.y^2$. Totius igitur corporis summa expressionis $\pi y^2 dx$ integratione reperitur.

Si non tota est superficies $PMM'P$, cujus circa AX rotatione corpus progignitur, sed sola ejus pars $MNN'M'$, summa planitiei, quae ordinatae parte mn efficitur, si pm per y'', pn per y' significaveris, est $= \pi\,(y''^2 - y'^2)$ et rotundi corporis volumen est

$$= \int\pi\,(y''^2 - y'^2)\,dx.$$

Centrum gravitatis corporis sic prognati haud dubie in axi AX positum erit, in quo igitur ejusdem situs determinandus est. In casu priori

$$X = \frac{\pi \int xy^2 dx}{\pi \int y^2 dx},$$

in casu secundo

$$X = \frac{\pi \int x dx \, (y''^2 - y'^2)}{\pi \int dx \, (y''^2 - y'^2)}.$$

Illa formula hac continetur.

32. De centro gravitatis in segmento globoso inveniendo.

Aequatio circuli, cujus diameter $= r$ et ubi punctum initiale in peripheria jacet, est

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)}, \quad \text{igitur}$$

$$\int y^2 dx = \int (2rx - x^2) \, dx = rx^2 - \tfrac{1}{3}x^3, \quad \text{et}$$

$$\int xy^2 dx = \int (2rx^2 - x^3) \, dx = \tfrac{2}{3}rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4,$$

in quibus formulis, cum pro x posueris 0, integrale evanescit, nullaque constans addi potest. Distantiam igitur centri gravitatis a puncto initiali hanc esse videmus:

$$X = \frac{8r - 3x}{12r - 4x} \cdot x.$$

Pro hemisphaera fit $x = r$,

ergo $X = \tfrac{5}{8} r$,

quae formula idem, quod supra inventa valet.

33. Centrum gravitatis conoidis parabolicae aeque facile invenitur, cum est

$$\int xy^2 dx = \tfrac{1}{3}ax^3,$$

$$\int y^2 dx = \tfrac{1}{2}ax^2.$$

A vertice igitur distat centrum gravitatis $\tfrac{2}{3}x$.

Caput V.

Investigatur gravitatis centrum superficierum, quae curvae revolutione circa datum axem gignuntur.

34. Nata superficies per Σ, et distantia ejusdem centri gravitatis inde a puncto initiali coordinatarum per X signetur. Per AF (Fig. 9.) axis notetur, circa quem curva $ACEF$ volvitur; quaeque particula Cc ejusdem parvum decurvatum conum circumscribit, cujus superficies est $= Cc \cdot \pi \cdot BC$.

Si linea coordinatarum AP per x, PC per y determinata, eamque ob causam $Cc = dS = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ est, differentiale superficiei corporis rotundi reperis

$$d\Sigma = 2\pi y dS, \quad \text{et}$$
$$\Sigma = 2\pi \int y dS.$$

Hac expressione generalibus formulis ad investigandum gravitatis centrum supposita, fit

$$X = \frac{2\pi \int xy dS}{2\pi \int y dS}.$$

35. Si superficiem hemisphaerae revolutione quadrantis sphaerici prognatam esse statuimus, est:

$$y^2 = r^2 - x^2, \quad dS = \frac{rdx}{y}, \quad \text{ergo}$$
$$2\pi \int y dS = 2\pi r x. \quad \text{Deinde est}$$
$$2\pi \int xy dS = \pi r x^2; \quad \text{igitur}$$
$$x = \frac{\pi r x^2}{2\pi r x} = \tfrac{1}{2}x.$$

Posito $x = r$ fit $X = \frac{1}{2}r$.

Sectio II.

Determinatio centri gravitatis in corporibus heterogeneis.

36. In corporibus inaequalis densitatis methodus centrum gravitatis determinandi in praecedentibus applicata adhiberi nequit, cum in iis volumina pro ponderibus substitui non possint.

In his corporibus densitatem aut sine lege aut certo quodam ordine distributam esse scimus. Si densitas corporis nulla lege definita est, centrum gravitatis calculo determinari non potest. Sequentia ad talia tantum corpora pertinebunt, quorum densitas aequali modo variatur.

37. Intensitatem gravitationis per p, et densitate variabili per δ indicata, quarum hanc functionem coordinatarum x, y, z esse ponimus: pondus elementi, cujus volumen $= dxdydz$ est, evadit aequale $\delta pdxdydz$, ac totum pondus corporis erit:

$$\int\int\int \delta \, . \, p \, . \, dx \, . \, dy \, . \, dz,$$

ergo

$$X = \frac{\int\int\int x\delta dxdydz}{\int\int\int \delta dxdydz},$$

$$Y = \frac{\int\int\int y\delta dydxdz}{\int\int\int \delta dxdydz},$$

$$Z = \frac{\int\int\int z\delta dxdydz}{\int\int\int \delta dxdydz}.$$

In his aequationibus p, factor communis, evanuit.